TD 3 - Stokes & div

Ex 11

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

(1) (a) $\text{rot}\,\vec{f} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2xy - 2xy = 0$.

(b) Il existe donc $h(x,y)$ tel que $\vec{f} = \vec{\nabla} h$ et

donc $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{l} = 0$ pour toute courbe simple Γ fermée.

(2) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ donnée par l'énoncé.

Détermination des points :

- B est l'intersection de la parabole d'équation $y^2 = 4 - 3x$ avec la droite $y = 0$, donc :

  x_B est tel que : $0 = 4 - 3x_B \Rightarrow x_B = \frac{4}{3}$

  $B = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$

- A est l'intersection de la même parabole avec la droite d'équation $y = x$, ses coordonnées x_A et y_A vérifient :

$$\left.\begin{array}{l} y_A = x_A \\ y_A^2 = 4 - 3x_A \end{array}\right\} \Rightarrow x_A^2 + 3x_A - 4 = 0$$

$\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$x_{A_1} = \frac{-3-5}{2} = -4$

$x_{A_2} > 0 \rightarrow$ pas possible

$A = (-4, -4)$

(a)(i) Γ_3 : segment de droite : $O \to A$

Paramétrisation possible : $\vec{\alpha_3}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,4]$

$$\int_{\Gamma_3} \vec{f} \cdot d\vec{\alpha_3} = \int_0^4 \begin{pmatrix} -t^3 \\ -t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \qquad \left(= \int_0^4 \vec{f}(\vec{\alpha_3}(t)) \cdot \vec{\alpha_3}'(t)\, dt \right)$$

$$= \int_0^4 2t^3\, dt = 2 \cdot \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{2} \cdot 4^4 = \underline{128}.$$

ii) Γ_2 : $\vec{\alpha_2}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{\alpha_2} = \int_0^{4/3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \underline{0}.$$

iii) Pour paramétrer Γ_1 : on choisit $y = t$ et $x = \frac{4-t^2}{3}$

avec $t : -4 \to 0$.

Soit, Γ_1 : $\vec{\alpha_1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4-t^2}{3} \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [-4, 0]$.

$$\int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{\alpha_1} = \int_{-4}^{0} \vec{f}(\vec{\alpha_1}(t)) \cdot \vec{\alpha_1}'(t)\, dt$$

$$= \int_{-4}^{0} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4-t^2)\,t^2 \\ \frac{(4-t^2)^2}{9}\,t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2t}{3} \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-4}^{0} -\frac{2}{9}(4-t^2)\,t^3 + \frac{t}{9}(16-2t^2+t^4)\, dt$$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{l_1} = -\frac{2}{9}\cdot\cancel{4}\cdot\left[\frac{t^4}{\cancel{4}}\right]_{-4}^{0} + \frac{2}{9}\left[\frac{t^6}{6}\right]_{-4}^{0} + \frac{16}{9}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-4}^{0}$$

$$-\frac{2}{9}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-4}^{0} + \frac{1}{9}\left[\frac{t^6}{6}\right]_{-4}^{0}$$

$$= \frac{2}{9}\underbrace{4^4}_{256} + \frac{1}{27}\left(-4^6\right) - \frac{8}{9}\cdot 4^2 + \frac{1}{18}\,4^4 - \frac{1}{54}\cdot 4^6$$

$$= \ldots \quad (\text{calculatrice}).$$

$\rightarrow$ 2ème méthode : Comme $\oint_{\Gamma} \vec{f}\cdot d\vec{l} = 0 = \int_{\Gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{l_1} + \int_{\Gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{l_2} + \int_{\Gamma_3}\vec{f}\cdot d\vec{l_3}$

On a : $$\int_{\Gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{l_1} = -\underbrace{\int_{\Gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{l_2}}_{=0} - \underbrace{\int_{\Gamma_3}\vec{f}\cdot d\vec{l_3}}_{=128}$$

$$= -128.$$

(b) $h(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2}$ est un potentiel de f (évident)

(c) $$\int_{\Gamma_3}\vec{f}\cdot d\vec{l_3} = -h(O) + h(A)$$

$$= -h(0,0) + h(-4,-4)$$

$$= -0 + \frac{1}{2}\cdot 4^4 = +128.$$

$$\int_{\Gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{l_1} = h(B) - h(A) = h\left(\tfrac{4}{3},0\right) - h(-4,-4) = 0 - \tfrac{1}{2}4^4 = -128$$

$$\int_{\Gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{l_2} = h(O) - h(B) = 0 - 0 = 0.$$