TD5 - Ex 5 -

Résoudre : $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$

Sous forme matricielle :

$$X'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X(t)$$

$$C_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & 2 \\ 10 & -(5+\lambda) & 7 \\ 4 & -2 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -(2-\lambda)^2(5+\lambda) - 40 - 28 + 8(5+\lambda) + 14(2-\lambda) + 10(2-\lambda)$$

$$= -(4-4\lambda+\lambda^2)(5+\lambda) \cancel{-40} \cancel{-28} + \cancel{40} + 8\lambda + \cancel{28} - 14\lambda + 20 - 10\lambda$$

$$= -(20 - 20\lambda + 5\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3) - 16\lambda + 20$$

$$= -(\cancel{20} \cancel{-16\lambda} + \lambda^2 + \lambda^3 + \cancel{16\lambda} \cancel{-20})$$

$$= -\lambda^2(\lambda+1)$$

$\begin{cases} 0 \text{ val. propre double} \\ -1 \text{ val. propre simple} \end{cases}$

* $E_0 = ?$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 10x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$L_3 - L_1 : \quad 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \overset{L_1}{\Rightarrow} z = 0.$

$$E_0 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \dim E_0 = 1$$

↳ A non diagonalisable mais trigonalisable.

* Cherchons $w_0 \in \mathrm{Ker}(A - 0.\mathbb{I}_3)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - 0.\mathbb{I}_3)$

(c'est à dire $\mathrm{Ker}\, A^2 \setminus \mathrm{Ker}\, A$)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$2x - y + z = 0$ ① $\longrightarrow z = 0 \,/\, 2x = y \longrightarrow \vec{v_0}$ précédent.

② Prenons $x = 0$ et alors $y = z$.

$$\vec{w_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{on pose } \vec{v_0} = A.\vec{w_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On choisit donc $(\vec{v_0}, \vec{w_0})$ comme base de $\mathrm{Ker}\, A^2$

- $E_{-1} = ?$

$v_1 \in \mathrm{Ker}(A + I_3)$, $A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 10 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 10x - 4y + 7z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases} , \quad \begin{array}{l} L_3 - 2L_1 : \ -2x - z = 0 , \ z = -2x \\ L_1 : \ 3x - y - 4x = 0 , \ y = -x \end{array}$$

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} .$$

Finalement, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a :

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système devient :

$$X'(t) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X(t)$$

Avec : $Y(t) = P^{-1} \cdot X(t)$, on obtient :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t)$$

$$\left(Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \right)$$

Soit : $\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = 0 \end{cases}$

→ On résout en commençant par la dernière ligne :

$$y_3'(t) = 0 \Rightarrow \underline{y_3(t) = \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$y_2'(t) = y_3(t) = \lambda \Rightarrow \underline{y_2(t) = \lambda . t + \mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$y_1'(t) = -y_1(t) \Rightarrow \underline{y_1(t) = \gamma e^{-t}}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

<u>Donc</u> : $Y(t) = \begin{pmatrix} \gamma e^{-t} \\ \lambda t + \mu \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

S'en suit : $X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \gamma e^{-t} \\ \lambda t + \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t) = \gamma e^{-t} + \lambda t + \mu \\ y(t) = -\gamma e^{-t} + 2\lambda t + \mu + \lambda \\ z(t) = -2\gamma e^{-t} + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \gamma e^{-t} + \lambda t + \mu \\ y(t) = -\gamma e^{-t} + \lambda(2t+1) + \mu \\ z(t) = -2\gamma e^{-t} + \lambda \end{cases}, \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$