

TD n°2

Cas statique: 1. Le courant est continu, la densité de courant dans le cuivre est uniforme et vaut:

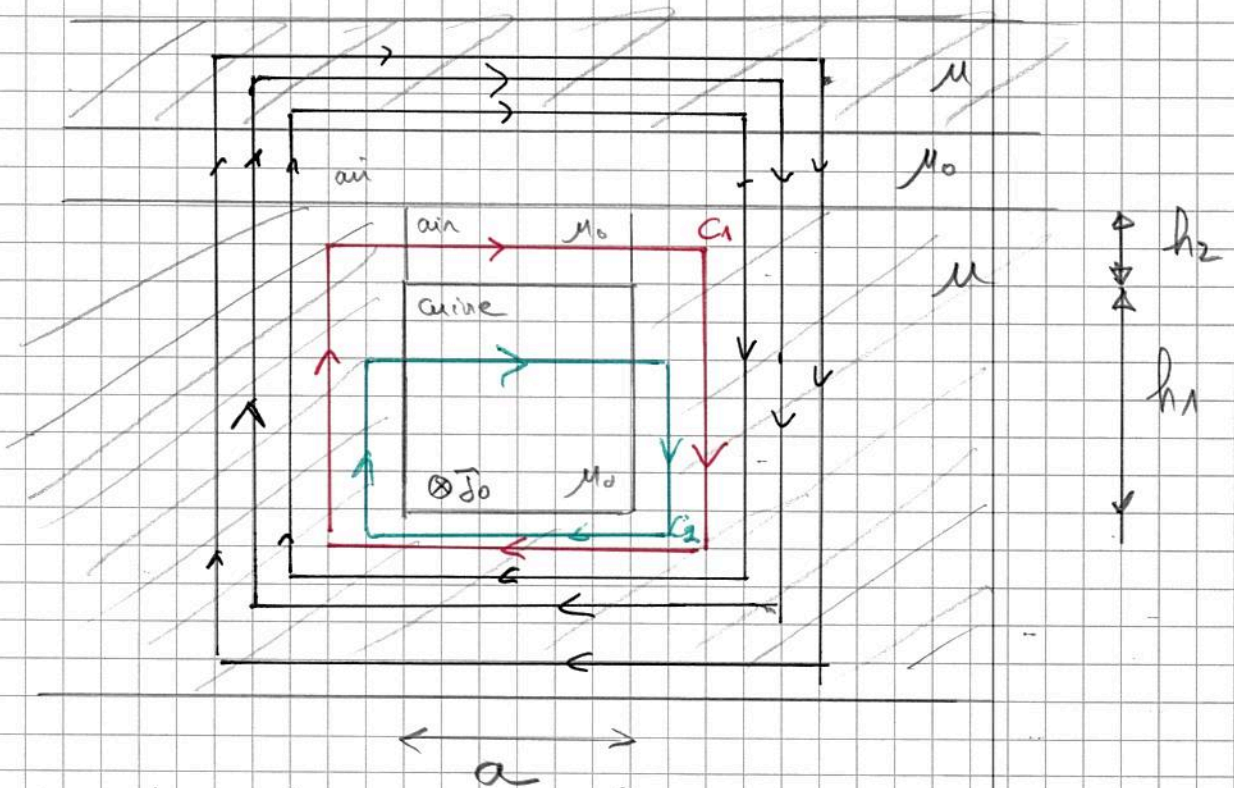
$$\vec{j}_0 = \frac{I_0}{ah_1} \vec{e}_y$$

Les pertes Joules valent alors:

$$P_J = \iiint_{\text{Cuivre}} \frac{1}{\sigma} \|\vec{j}_0\|^2 dv = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{I_0^2}{a^2 h_1^2} \cdot \underbrace{V_{\text{cuivre}}}_{= ah_1 L_z}$$

Soit:
$$P_J = \frac{1}{\sigma} \underbrace{\frac{L_z}{ah_1}}_{R_0} \cdot I_0^2$$

2.



→ Exemple de lignes de champ.

On considère que dans l'encoche (zone d'air ou de cuivre), on a: $\vec{h} = h(y) \vec{e}_x$

(\vec{h} est porté par \vec{e}_x et invariance selon $\vec{e}_y + \text{div} \vec{h} = 0 = \text{div} \vec{h}$)

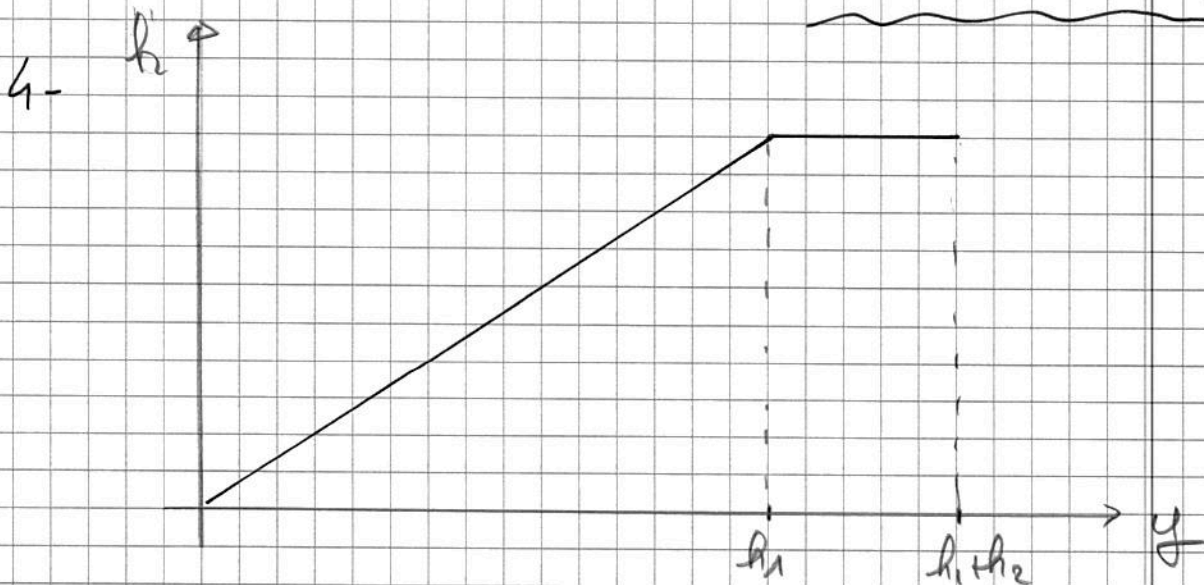
3- On applique le théorème d'Ampère :

⊗ Sur G_1 : $\oint_{G_1} \vec{h} \cdot d\vec{l} = I_{encl} = I_0$
 $\underbrace{h(y) \cdot a}_{\leftarrow (\mu \infty)}$

Donc : $\forall y \in [h_1, h_1+h_2] : \underline{h(y) = \frac{I_0}{a}}$

⊗ Sur G_2 : $\oint_{G_2} \vec{h} \cdot d\vec{l} = \iint_{S \subset G_2} \vec{j} \cdot d\vec{s} = j_0 \cdot a \cdot y = \frac{I_0}{h_1} \cdot y$
 $\underbrace{h(y) \cdot a}$

Donc : $\forall y \in [0, h_1] : \underline{h(y) = \frac{I_0}{a} \cdot \frac{y}{h_1}}$



③

$$5. W_e = \iiint_{\text{encabe}} \frac{1}{2} \mu_0 h(y)^2 dx dy dz$$

$$= \iiint_{\text{cuivre}} \frac{1}{2} \mu_0 h(y)^2 dx dy dz + \iiint_{\text{air}} \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{I_0^2}{a^2} dx dy dz$$

$$= a \cdot L_3 \frac{\mu_0}{2} \int_0^{h_1} \frac{I_0^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{h_1^2} dy + \frac{\mu_0}{2} \frac{I_0^2}{a^2} \cdot a h_2 L_3$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{I_0^2}{a} L_3 \left(\frac{1}{h_1^2} \frac{h_1^3}{3} + h_2 \right)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 \left(\frac{h_1}{3} + h_2 \right)}_{L_0} \frac{L_3}{a} I_0^2$$

Cas harmonique: $I(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega t) = \text{Re} \left(\sqrt{2} \frac{I_{\text{eff}}}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} \right)$

On a donc: $\underline{I} = I_{\text{eff}} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

(en temps)

1. Le courant n'est plus constant \checkmark donc la densité volumique de courant n'est plus uniforme -

↳ Par contre, on pourra toujours appliquer le théorème d'Ampère sur C_1 (dans l'air) car le courant enlacé est toujours le courant total $I(t)$ -

④

Donc dans la zone d'air de l'encoche, on

a encore : $h(y) = \underset{(\text{en } y)}{\text{cte}} = \frac{I(t)}{a}$

(Rq: en complexe: $\underline{h}(y) = \frac{\underline{I}}{a}$)

2. Dans le cuivre: $\text{rot } \vec{h} = \vec{j}$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{h}) = \text{rot } \vec{j} = \nabla \text{rot } \vec{e} = -\nabla \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{h}) = -\nabla \mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$

grad (div \vec{h}) - $\nabla^2 \vec{h}$

$0 = \text{div } \vec{e} = \mu \text{div } \vec{h} \Rightarrow \text{div } \vec{h} = 0$
(zone cuivre uniquement).

Au final: $\nabla^2 \vec{h} - \nabla \mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0$

\vec{h} conserve les mêmes géométries que précédemment

($\vec{h} = h(y) \vec{e}_x$), et en projetant sur \vec{e}_x :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \nabla \mu \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{avec } h(y, t))$$

3. On pose : $h(y, t) = \text{Re}(\sqrt{2} \underline{h}(y) e^{j\omega t})$

En $\underline{h}(y)$: $\frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial y^2} - j\sigma \mu \omega \underline{h} = 0$

(5)

On résout l'équation grâce aux 2 conditions aux

limites:

$$\begin{cases} \textcircled{*} \underline{h}(0) = 0 & (\mu \rightarrow \infty) \\ \textcircled{*} \underline{h}(h_1) = \frac{\underline{I}}{a} & (\text{continuité de } h_t \\ & \text{Car pas de sources surfaciques}) \end{cases}$$

Les racines du polynôme caractéristique sont:

$$d_2 = \pm \sqrt{j} \sqrt{\gamma \mu \omega} \quad (\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu \omega}})$$

Soit: $d = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\gamma \mu \omega} = \pm \frac{1-j}{\delta}$

Donc: $\underline{h}(y) = A e^{\frac{1+j}{\delta} y} + B e^{-\frac{1+j}{\delta} y}$

$$\underline{h}(0) = 0 = A + B \Rightarrow B = -A$$

$$\underline{h}(y) = \frac{\underline{I}}{a} = A \left(e^{\frac{1+j}{\delta} h_1} - e^{-\frac{1+j}{\delta} h_1} \right)$$

$$A = \frac{\underline{I}_{eff} e^{-j\pi/2}}{a \left(e^{\frac{1+j}{\delta} h_1} - e^{-\frac{1+j}{\delta} h_1} \right)} = \frac{-j \cdot \underline{I}_{eff}}{a \left(e^{\frac{1+j}{\delta} h_1} - e^{-\frac{1+j}{\delta} h_1} \right)}$$

(car $\sin(\omega t)$)

$$\underline{h}(y) = \frac{-j}{a} \cdot \frac{e^{\frac{1+j}{\delta} y} - e^{-\frac{1+j}{\delta} y}}{e^{\frac{1+j}{\delta} h_1} - e^{-\frac{1+j}{\delta} h_1}} \underline{I}_{eff}$$

5. La densité volumique d'énergie magnétique dans le cuivre est alors:

$$\begin{aligned}
w_m &= \frac{1}{2} \mu_0 \underline{h(y)} \cdot \underline{h(y)}^* = \frac{1}{2} \mu_0 |\underline{h(y)}|^2 \\
&= \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{I_{eff}^2}{a^2} \cdot \frac{(e^{\frac{1+i}{\delta}y} - e^{-\frac{1+i}{\delta}y})(e^{-\frac{1-i}{\delta}y} - e^{\frac{1-i}{\delta}y})}{(e^{\frac{1+i}{\delta}h_1} - e^{-\frac{1+i}{\delta}h_1})(e^{\frac{1-i}{\delta}h_1} - e^{-\frac{1-i}{\delta}h_1})} \\
&= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I_{eff}^2}{a^2} \frac{e^{\frac{2y}{\delta}} - e^{-\frac{2y}{\delta}} - e^{\frac{2y}{\delta}} + e^{-\frac{2y}{\delta}}}{e^{\frac{2h_1}{\delta}} - e^{-\frac{2h_1}{\delta}} - e^{\frac{2h_1}{\delta}} + e^{-\frac{2h_1}{\delta}}}
\end{aligned}$$

Soit: $w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I_{eff}^2}{a^2} \cdot \frac{\text{ch}(\frac{2y}{\delta}) - \cos(\frac{2y}{\delta})}{\text{ch}(\frac{2h_1}{\delta}) - \cos(\frac{2h_1}{\delta})}$

⊗ Pour $y \in [h_1, h_1+h_2]$: cas statique:

$$W_{cuivre} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I_{eff}^2}{a^2} \cdot h_2 \cdot a \cdot l_z = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h_2 l_z}{a} I_{eff}^2$$

⊗ Pour $y \in [0, h_1]$:

$$W_{cuivre} = \iiint_{cuivre} w_m dV = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I_{eff}^2}{a^2} \left(\int_0^{h_1} \frac{\text{ch}(\frac{2y}{\delta}) - \cos(\frac{2y}{\delta})}{\text{ch}(\frac{2h_1}{\delta}) - \cos(\frac{2h_1}{\delta})} dy \right) a h_2$$

$$W_{cuivre} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I_{eff}^2 a l_z}{a^2 (\text{ch}(\frac{2h_1}{\delta}) - \cos(\frac{2h_1}{\delta}))} \cdot \frac{\delta}{2} \left(\left[\text{sh}(\frac{2y}{\delta}) \right]_0^{h_1} - \left[\sin(\frac{2y}{\delta}) \right]_0^{h_1} \right)$$

$$W_{cuivre} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{l_z \delta}{2 a} \frac{\text{sh}(\frac{2h_1}{\delta}) - \sin(\frac{2h_1}{\delta})}{\text{ch}(\frac{2h_1}{\delta}) - \cos(\frac{2h_1}{\delta})} I_{eff}^2$$

$$W_e = W_{e_{\text{air}}} + W_{e_{\text{cune}}}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 \frac{L_0}{a} \left(h_2 + \frac{\delta}{2} \frac{\text{sh}\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2h_1}{\delta}\right)}{\text{ch}\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2h_1}{\delta}\right)} \right)}_{\mathcal{L}f(\omega)} I_{\text{eff}}^2$$

$$\text{Si } \omega \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow \infty, \quad \frac{2h_1}{\delta} \approx 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Numérateur: } \text{sh}\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 2 \cdot \frac{(2h_1)^3}{3!} \frac{1}{\delta^3} \quad (N) \\ \text{Dénominateur: } \text{ch}\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 2 \cdot \frac{(2h_1)^2}{2} \frac{1}{\delta^2} \quad (D) \end{array} \right.$$

$$\frac{N}{D} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{2h_1}{3} \cdot \frac{1}{\delta} \quad \text{et donc:}$$

$$\mathcal{L}f(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \mu_0 \frac{L_0}{a} \left(h_2 + \frac{h_1}{3} \right) = \mathcal{L}f_0 \quad \boxed{\text{OK}}$$

$$6. \quad \underline{\underline{J}} = \text{rot} \underline{\underline{A}} = - \frac{\partial}{\partial y} (A_x) \underline{\underline{e}}_y$$

$$\underline{\underline{j}} = \frac{\dot{j}}{a} \cdot \frac{1+j}{\delta} \cdot \frac{e^{\frac{1+j}{\delta} y} + e^{-\frac{1+j}{\delta} y}}{e^{\frac{1+j}{\delta} h_1} - e^{-\frac{1+j}{\delta} h_1}} I_{\text{eff}}$$

$$P_B = \frac{1}{\sigma} \underline{\underline{j}} \cdot \underline{\underline{j}}^* = \frac{1}{\sigma} |\underline{\underline{j}}|^2$$

$$= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2}{\delta^2} \cdot I_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{\text{ch}\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2h_1}{\delta}\right)}{\text{ch}\left(\frac{2h_1}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2h_1}{\delta}\right)} \quad (\text{cf question 5})$$

Les pertes joules totales sont donc :

$$P_J = \iiint_{\text{Cube}} \vec{E} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{\epsilon} \frac{2}{a^2 \delta^2} \cdot a L_3 \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\text{sh}(\frac{2h_1}{\delta}) + \sin(\frac{2h_1}{\delta})}{\text{ch}(\frac{2h_1}{\delta}) - \cos(\frac{2h_1}{\delta})} I_{\text{eff}}^2$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{L_3}{a \delta} \cdot \frac{\text{sh}(\frac{2h_1}{\delta}) + \sin(\frac{2h_1}{\delta})}{\text{ch}(\frac{2h_1}{\delta}) - \cos(\frac{2h_1}{\delta})} I_{\text{eff}}^2$$

$R(\omega)$

$$\left. \begin{array}{l} N \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 2 \cdot \frac{2h_1}{\delta} \\ D \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 2 \cdot \frac{(2h_1)^2}{2 \delta^2} \end{array} \right\} \frac{N}{D} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{4h_1}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{4h_1^2} = \frac{\delta}{h_1}$$

$$R(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{L_3}{a h_1} = R_0 \quad \boxed{\text{OK}}$$