Examen Final, année 2017/2018

Durée : 2 heures

Consignes : *Aucun document autorisé à l'exception d'une feuille A4 manuscrite recto-verso.* ***Aucun appareil électronique autorisé.***
Barème : *2 points par question.*

Problème : La Barre de Fer

Katia : « La barre de faire ?! Mais, la barre de faire quoi ? »
Chun Norris : « La barre de faire tout, la barre de faire des exercices... »

On considère une barre de fer cylindrique de longueur L supposée très grande devant son rayon R. On notera μ la perméabilité magnétique du fer et σ sa conductivité électrique. À extrémités, on installe des contacts électriques permettant de faire parcourir un courant $I(t)$ de manière longitudinale à l'intérieur de cette barre. Une représentation schématique du problème est donnée en FIGURE 1.

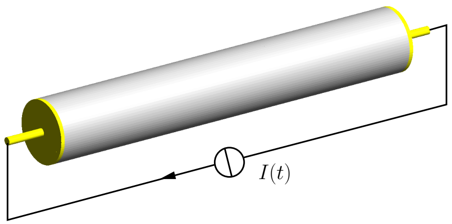

FIGURE 1 – Représentation schématique et référence associée.

Cas statique : On alimente la barre en courant continu : $I(t) = I_0$.

1. Donner la densité de courant $\vec{\mathbf{j}}$ à l'intérieur de la barre. Calculer les pertes Joules correspondantes et en déduire l'expression de sa résistance électrique statique R_0.
2. Calculer le champ magnétique $\vec{\mathbf{h}}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la barre.

Cas harmonique : Maintenant, on alimente la barre avec un courant de la forme : $I(t) = I_{eff}\sqrt{2}\,\cos(\omega\, t)$.

3. Donner (en l'expliquant) la valeur du courant complexe $\underline{I}$.
4. À quelle équation complexe obéit la densité de courant $\underline{\vec{\mathbf{j}}}$?
5. Résoudre cette équation. (On donnera uniquement la forme générale de la solution).
6. Que vaut le champ magnétique complexe $\underline{\vec{\mathbf{h}}}$ à l'extérieur de la barre ?
7. Se servir de la question précédente pour déterminer la constante intervenant dans l'expression de $\underline{\vec{\mathbf{j}}}$, et donner ainsi l'expression complète de cette solution.
8. Donner l'expression de $\underline{\vec{\mathbf{h}}}$ à l'intérieur de la barre.
9. Donner l'expression générale des pertes Joules (sous forme intégrale uniquement), et celle de la résistance électrique de la barre $R(\omega)$ correspondante.
10. Retrouver le cas limite : $\lim\limits_{\omega \to 0} R(\omega) = R_0$.
11. Que se passe-t'il quand $\omega \longrightarrow \infty$, et que vaut la résistance R_∞ ?

Question bonus : À quoi fait référence cet examen ?

Formulaire :

$$\Delta\, a = \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

$$\mathbf{rot\,a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial\, a_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\mathbf{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\, a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{u_z}$$

Fonctions de Bessel :

$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p\,!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,p},\quad J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)\,(p\,!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\,p},\quad J_0'(x) = -J_1(x)$$